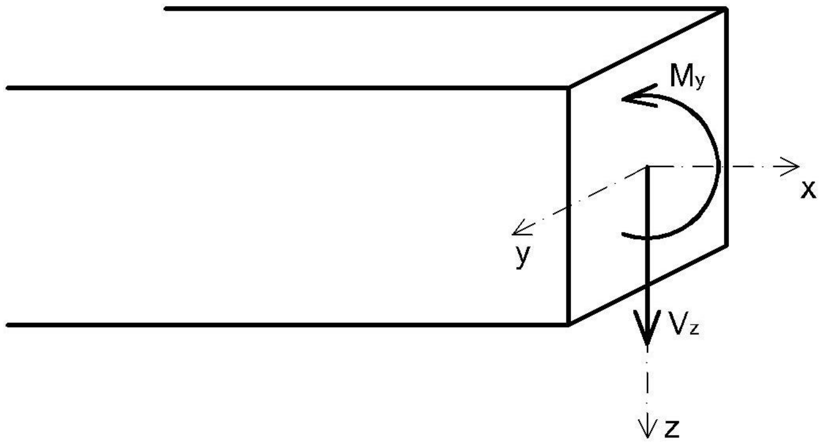
# Ohýbaný nosník - napětí

*Teorie*

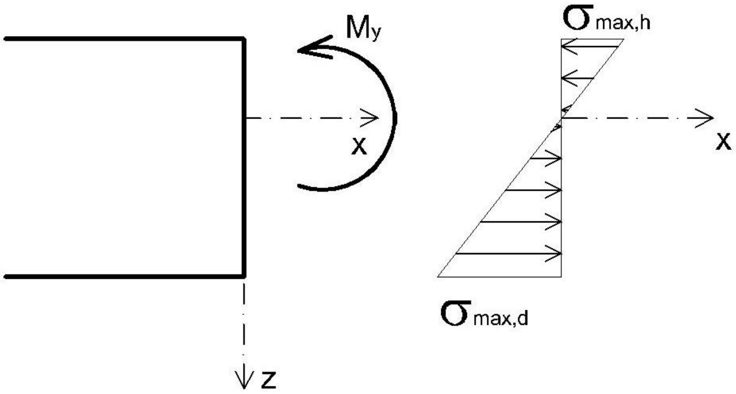
**Prostý ohyb, rovinný ohyb**

Při prostém ohybu je průřez namáhán ohybovým momentem otáčejícím kolem jedné z hlavních os setrvačnosti průřezu, obvykle osy *y*. Moment se značí $M_y$ nebo jenom *M*. Běžněji je možné se setkat s ohybovým momentem v kombinaci s posouvající silou ve směru druhé z hlavních os setrvačnosti, označovanou $V_z$ nebo jenom *V*. V tomto případě hovoříme o rovinném ohybu.




**Normálové napětí**

Ohybový moment způsobuje normálové deformace průřezu $\varepsilon_x$ a normálové napětí $\sigma_x$. Na základě Bernoulli-Navierovy hypotézy o zachování rovinnosti průřezů po deformaci, se předpokládá lineární rozložení těchto veličin po výšce průřezu.




Průběh napětí po průřezu v závislosti na souřadnici z je dán rovnicí

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y},$$

kde

$I_y$ je moment setrvačnosti průřezu

$z$ je z-ová souřadnice bodu v průřezu

$M_y$ je ohybový moment

**Extrémní normálová napětí**

Souřadnice $z$ je v čitateli vzorce pro normálové napětí, největší moment je pro největší hodnotu $z$, tedy v krajních vláknech. Moment setrvačnosti $I_y$ je obvykle konstantní pro celý nosník, maximální souřadnice $z$ je obvykle konstantní pro celý nosník. Moment $M_y$ je proměnný po délce nosníku. Protože je v čitateli, extrém normálového napětí, bude v místě největšího ohybového momentu.

Pokud se nerozlišuje o jaký extrém se má jednat (tah, tlak) vznikne tento extrém ve vzdálenějších vláknech od těžiště a v místě největšího ohybového momentu v absolutní hodnotě.
Pokud se hledá například největší tahová napětí a průřez je nesymetrický, je třeba srovnat napětí v horních vláknech v místě největšího záporného momentu s napětím v dolních krajních vláknech v místě největšího kladného momentu. Obdobnou úvahu je třeba provést pro největší tlaková napětí.

**Smyková napětí v masivním průřezu**

U masivních průřezů se obvykle zabýváme jenom napětím ve směru posouvající síly, tedy napětím $\tau_{xz}$. Ve směru kolmém předpokládáme konstantní rozdělení tohoto napětí.

Velikost smykového napětí se určí ze vztahu

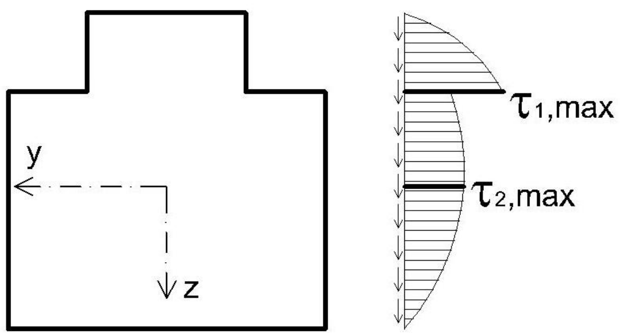
$$\tau_{xz} = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y b},$$

kde

| | |
|---|---|
| $V_z$ | je posouvající síla |
| $\bar{S}_y$ | je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem |
| $I_y$ | je moment setrvačnosti průřezu |
| $b$ | je šířka průřezu v místě v místě řezu |

**Průběhy smykových napětí po masivním průřezu**

Moment setrvačnosti $I_y$ konstantní pro každý řez na průřezu a obvykle i po délce nosníku. $V_z$ je konstantní pro daný průřez a $\bar{S}_y$ a $b$ se mění po výšce průřezu. Pro krajní vlákna je statický moment plochy $\bar{S}_y$ nulový a tedy i smyková napětí jsou v krajních vláknech nulová.
Pro obdélníkové části je šířka $b$ konstantní. Statický moment odříznuté části je parabolou druhého stupně, neboť je součinem lineárně měnícího se plochy a lineárně měnícího se ramene po výšce. Z toho plyne, že i průběh smykových napětí bude po výšce částí průřezu parabolou.
Extrémní napětí nastává v místě maximálního statického momentu plochy $\bar{S}_y$, tedy v těžišti celého průřezu, popřípadě na rozhraní různých šířek průřezu (v užší části).



**Smyková napětí v tenkostěnném průřezu**
Pro tenkostěnné průřezy se uvažuje konstantní rozložení smykového napětí po tloušťce jednotlivých částí průřezu. Směr napětí odpovídá směru os jednotlivých částí

$$\tau = \frac{V_z \bar{S}_y}{I_y t},$$

kde

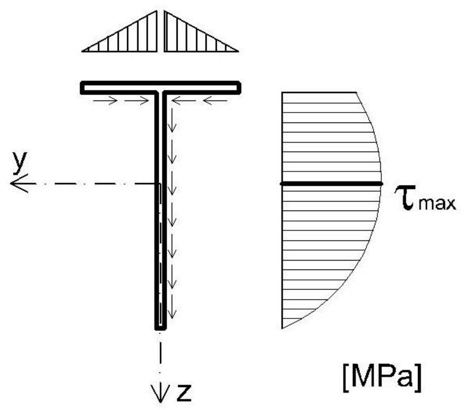
$V_z$ je posouvající síla

$\bar{S}_y$ je statický moment plochy dolní části průřezu odříznuté myšleným řezem vedeným ve směru tloušťky dané části

$I_y$ je moment setrvačnosti průřezu

$t$ je tloušťka části v místě řezu

**Průběhy smykových napětí po tenkostěnném průřezu**
Moment setrvačnosti $I_y$ konstantní pro každý řez na průřezu a obvykle i po délce nosníku. $V_z$ je konstantní pro daný průřez. Tloušťka $t$ je obvykle konstantní pro každou část průřezu. Statický moment odříznuté části $\bar{S}_y$ se mění se změnou polohy řezu. Pro krajní vlákna je statický moment plochy $\bar{S}_y$ nulový a tedy i smyková napětí jsou v krajních vláknech nulová.
Pro obdélníkové části je šířka $t$ konstantní. Pro svislé obdélníkové části je statický moment odříznuté části parabolou druhého stupně, neboť je součinem lineárně měnícího se plochy a lineárně měnícího se ramene. Pro vodorovné obdélníkové části je statický moment odříznuté části lineární, neboť je součinem lineárně měnící se plochy a konstantního ramene.
Z toho plyne, že i průběh smykových napětí bude ve svislém směru parabolou a ve vodorovném směru lineární.
Extrémní napětí nastává v místě maximálního statického momentu plochy $\bar{S}_y$, tedy v těžišti celého průřezu, popřípadě na rozhraní různých tloušťek průřezu (v užší části).




# Průhyb nosníku - integrace ohybové čáry

Zatížení se vyjádří jako funkce souřadnice *x: q=f(x).*
Postupně se integruje pomocí statických, fyzikálních a geometrických podmínek pro ohyb prutu.

$$V(x) = \int -q(x)dx$$

$$M(x) = \int V(x)dx$$

$$\varphi(x) = \int \frac{-M(x)}{EI} dx$$

$$w(x) = \int \varphi(x)dx$$

Při integraci vznikají integrační konstanty - celkem 4. Získají se z okrajových podmínek (známé hodnoty funkcí *V, M* $\varphi$, *w* ) – pro každou podporu 2.

*POZN.:* V případě staticky určitých nosníků 2 konstanty je možno určit při integraci prvních dvou statických podmínek. Často je místo prvních dvou kroků možno vyřešit průběh momentů obvyklým způsobem a pak určit jeho funkci z diagramu. V případě staticky neurčitých nosníků je nutno určit všechny konstanty až při integraci geometrických podmínek.

## Složitější případ

Pokud nejsou zatížení nebo tuhost nosníku po celé délce nosníku popsány hladkou křivkou, je třeba nosník rozdělit na úseky, kde je toto splněno. V každém úseku se určí funkce ohybového momentu. Dvojnou integrací se získá rovnice pootočení a průhybu.

$$\varphi(x) = \int \frac{-M(x)}{EI} dx$$

$$w(x) = \int \varphi(x)dx$$

Při integraci v každém úseku vzniknou dvě integrační konstanty. K dispozici k jejich určení jsou kromě celkem dvou podmínek v podporách nosníku ještě dvě podmínky na každém rozhraní úseků. Tyto podmínky zajišťují spojitost pootočení a průhybu

$$\varphi_{i(x=xi)} = \varphi_{i+1(x=xi)}$$

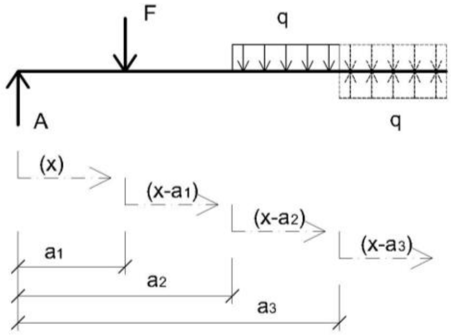
$$w_{i(x=xi)} = w_{i+1(x=xi)},$$

kde $x_i$ je souřadnice konce *i*-tého úseku.

## Průhyb nosníku - Clebschova metoda

Metoda využívá vztahů používaných při integraci ohybové čáry. Při postupu se však užijí některá jiná pravidla:

- Ohybový moment začneme vyjadřovat z levé strany nosníku. Změna zatížení (zatížení není v tomto místě popsáno hladkou křivkou) začíná nový úsek, který se v rovnici oddělí svislou čarou. V tomto úseku platí celá předchozí část rovnice a přidá se vliv nového zatížení.
- Vliv spojitého zatížení, které v daném úseku už nepokračuje, je třeba od následujícího úseku odebrat tím, že se přidá opačné zatížení.
- V daném úseku se pracuje s lokálními souřadnicemi tohoto úseku, které se vyjádří pomocí vztahu (x-$a_i$), kde $a_i$ je souřadnice začátku úseku.
- Při integraci je nutné pracovat s celým výrazem v závorce jako s nezávislou proměnnou a závorku neroznásobovat.
- Pokud integrujeme osamělý moment, příslušná proměnná je závorka odpovídající úseku, ve kterém se moment nachází.
- Integrační konstanty vznikající při integraci, jsou platné pro celou rovnici. Je tedy vhodné je přidat do prvního úseku, jehož rovnice platí pro celý nosník.




Např. pro nosník na obrázku se napíše rovnice ohybového momentu:

$$M = Ax - \Big|_{x>a_1} - F(x-a_1)\Big|_{x>a_2} - q\frac{(x-a_2)^2}{2}\Big|_{x>a3} + q\frac{(x-a_3)^2}{2}$$

## Průhyb nosníku – Mohrova metoda

Při integraci ohybové čáry řešíme 4 diferenciální rovnice.
Statické podmínky:

$$V'(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = V(x)$$

Geometrické podmínky:

$$\varphi'(x) = \frac{-M(x)}{EI}$$

$$w'(x) = \varphi(x)$$

Po zavedení substituce:

$$\overline{q}(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\overline{V'}(x) = \varphi(x)$$

$$\overline{M'}(x) = w(x)$$

Můžeme geometrické podmínky zapsat ve tvaru

$$\overline{V'}(x) = -\overline{q}(x)$$

$$\overline{M'}(x) = \overline{V}(x)$$

Tyto podmínky jsou obdobné podmínkám statickým. Je možné je řešit stejným způsobem, jako postupujeme při řešení průběhů vnitřních sil – tedy počítat hodnoty vnitřních sil z podmínek rovnováhy na části nosníku.

Problémem jsou pouze okrajové podmínky na tomto fiktivním nosníku zatíženým $\overline{q}(x)$. Pokud chceme pracovat s pootočením jako s posouvající silou a s průhybem jako s momentem, musíme na fiktivním nosníku zajistit, aby podepření vyjadřovalo takové okrajové podmínky pro posouvající síly a momenty, jaké jsou platné na skutečném nosníku pro pootočení a průhyb. Následující tabulka znázorňuje, jak je třeba upravit okrajové podmínky na fiktivním nosníku, aby toto bylo zajištěno.

Pokud je tuhost nosníku konstantní, můžeme ještě provést následující úpravu:

$$\overline{q}(x) = M(x)$$

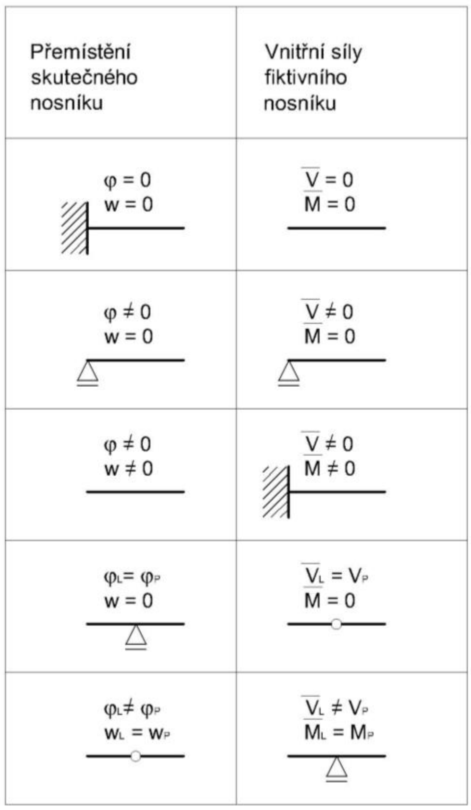
$$\varphi(x) = \frac{\overline{V}'(x)}{EI}$$

$$w(x) = \frac{\overline{M}'(x)}{EI}$$

V tomto případě mají veličiny jiný fyzikální význam a jiné jednotky.
Diferenciální geometrické podmínky zůstanou nezměněny:

$$\overline{V}'(x) = -\overline{q}(x)$$

$$\overline{M}'(x) = \overline{V}(x)\,.$$




Obr.: Okrajové podmínky na skutečném a fiktivním nosníku.